Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 220–225

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

provaizdis

Regina Rudalevičienė[1], Romualdas Kašuba[2]

[1] *Vilniaus „Ryto“ vidurinė mokykla*
D. Gerbutavičiaus 9, LT-04320 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: rudaleviciene.regina@gmail.com, romualdas.kasuba@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame straipsnyje nagrinėjami ir aptariami kai kurie natūralūs uždavinių sprendimo ir mokslo teorijų vystymosi panašumai.

Raktiniai žodžiai: uždavinių sprendimo etapai, natūrali mokslo teorijų raida, mokyklinė didaktika, kūrybingumo potencialas, uždavinio pateikimo estetika.

Niekas nebesiginčija, kad bet kuris mokslas susideda iš tam tikrų faktų ar teiginių, kuriuos tas mokslas nagrinėja (ir, vadinasi, laiko juos teisingais) ir samprotavimų apie juos. Taigi, paprastai sakant, konkretus mokslas turi konkrečius teiginius ir apie juos konkrečiai samprotauja. Besamprotaujant atsiranda naujų faktų ir naujų samprotavimų. Palaipsniui atsiskiria pagrindiniai faktai ir esminiai samprotavimai apie juos. Iš faktų bazės kyla teorinis antstatas. Neišvengiamai visada esti faktai – teorija ir neišvengiamai visada yra giliausios išvados apie juos – filosofija. Fizikai neišvengiamai prisimintų, kad yra kūnas ir yra jo sukeliamas laukas. Yra tos dvi pagrindinės neišvengiamos bet kurios mokslinės teorijos dedamosios komponentės.

Norėtume pasakyti, kad tokiu požiūriu kiekvieno uždavinio sprendimas kuria ne tik to uždavinio sprendimo būdą arba metodiką, bet ir to uždavinio „sprendimo mokslą“. Užsispyrę kiekvieno geresnio ar naudingesnio uždavinio sprendimą mes galėtume laikyti to uždavinio sprendimo mokslo kūrimu.

Tokiame sprendime irgi atsiranda faktai – uždavinių sprendimo atveju jais yra teisingi teiginiai – ir atsiranda samprotavimai apie jų sąsajas. Toliau sprendžiant uždavinį atsiranda nauji faktai-teiginiai ir naujos įžvalgos apie jų sąsajas ir taip tęsiasi iki uždavinio sprendimo pabaigos. Išsprendus uždavinį uždavinio sprendimo mokslas iš esmės baigiasi. Ir jeigu uždavinys yra gražesnis ar kaip kitaip vertingas, tai labai svarbus esti tinkamas uždavinio sprendimo „mokslo“ pateikimas arba uždavinio sprendimo pateikimas.

Straipsnyje panagrinėsime keleto tokių uždavinių sprendimą ir pamėginsime iškelti kai kuriuos metodinius ir psichologinius tokių „uždavinių sprendimo mokslo“ ypatumus.

Paimkime kokį nors nelabai lengvą uždavinį ir pamėginkime jį spręsti ir spręsdami pažiūrėkime, kokia gali būti ir iš ko gali susidėti tokio uždavinio sprendimo praktinė ir teorinė pusė.

Šioje vietoje labai sunku susilaikyti nepacitavus vieną mintį, išspausdintą 2003 metų JAV žurnalo *Notices of American Mathematical Society* birželio–liepos numerio vedamajame:

> „Matematika yra panaši į briliantą: išskirtinai kieta medžiaga, bet labai vertinga ir nepaprastai vertinama tiek dėl savo taikymų pramonėje, tiek ir dėl savo vidinio žavesio."

Galima būtų pridurti, kad stabilūs dalykai, jei jie tikrai vertingi, tai niekada nebūna negražūs arba labai jau paprastai „sudėti".

Kita, gal net kietesnė išvada būtų tokia, kad viskas, kas čia yra pasakyta apie matematikos kaip mokslo kietumą, pritaikomumą ir gražumą, tinka ir kalbant apie praktiškai bet kokio įdomesnio (tada dažnai ir sudėtingesnio) uždavinio sprendimą.

Vėl mes dar kalbėsime ir apie uždavinio sprendimo žavesio „konkretumą".

Paimkime tokį uždavinį, kurį mes radome Argentinos olimpiadoje – norėtume priminti, kad šių metų Pasaulinė moksleivių matematikos olimpiada vyks tolimojoje Argentinoje. Šioje vietoje, jeigu jau prisiminėme Argentiną, tai malonu būtų prisiminti ir tai, kad Olimpiada Argentinoje jau yra vykusi ir 1997, kurioje 6-tuoju (pačiu sunkiausiu uždaviniu buvo mūsiškio Giedriaus Alkausko pasiūlytas uždavinys.

Pilną jo sprendimo teoriją per labai trumpą sprendimui skirtą laiką sugebėjo sukurti 11 pasaulio čempionato dalyvių.

Čia norėtųsi prisiminti nemirtingojo Getės žodžius „Teorija, brolau, sausa šaka, užtat gyvenimo vaisingas medis žydi" – tik vietoj žodžio sausa taip ir norisi sakyti „sunki", „rimta", ar net „nepalenkiama". Rimti dalykai nebūna paprasti.

Bet dabar jau grįžkime prie paties uždavinio:

Kiek mažiausiai svarelių (*nebūtinai vienodo svorio*) *reikėtų turėti, kad juos visus būtų galima suskirstyti ir į* 4*, ir į* 5*, ir į* 9 *vienodo svorio krūveles*?

Kas iš karto krenta į akis jau beveik po pirmo dirstelėjimo į sąlygą. Nerizikuodami kalbėti už visus norėtume pasakyti, kad į akis tikrai krinta tai, kad tie skaičiai yra „kas sau", t. y., jie neturi bendrų daliklių ir dar tai, kad abiejų mažesniųjų skaičių suma duoda didžiausiąjį skaičių.

Todėl elgdamiesi atsargiai mes galėtume sukurti sau šio uždavinio sprendimo treniruotę spręsdami, pavyzdžiui tokį uždavinį, kuriame vietoje skaičių 4, 5 ir 9 imtume skaičius 2, 3 ir 5:

Pagalbinis uždavinys:

Kiek mažiausiai svarelių (*nebūtinai vienodo svorio*) *reikėtų turėti, kad juos visus būtų galima suskirstyti ir į* 2*, ir į* 3*, ir į* 5 *vienodo svorio krūveles*?

Pirmiausiai tiktų pastebėti pagrindinį egzistencinį faktą arba tai, kad uždavinio kūrimo teorija apskritai yra įmanoma.

Paimkime

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

vienodų svarelių ir tada mes matome, kad 30 tokių svarelių sistema tikrai yra viena iš įmanomų galimybių atlikti tai, ko iš mūsų tikisi uždavinys. Tikrai, 30 svarelių mes galime suskirstyti ir į

2 vienodo svorio grupes po 15,

ir į

3 vienodo svorio grupes po 10,

ir į

$$5 \text{ vienodo svorio grupes po } 6 \text{ svarelius.}$$

Dabar, kai mes jau nebeabejojame uždavinio išsprendžiamumu, arba uždavinio sprendimo teorijos egzistavimu, mums beliko iš visų galimų tokių svarelių rinkinių (kartojame, nebūtinai vienodų, kaip pas mus kad dabar buvo) išrinkti sistemą su pačiu mažiausiu svarelių skaičiumi.

Mums nekelia jokių abejonių, kad jeigu egzistuoja tinkama baigtinė svarelių sistema, tai atsiras ir sistema su mažiausiuoju svarelių skaičiumi.

Tačiau šioje vietoje mes turime iš karto pasakyti, kad jeigu mes spręsime uždavinį nenaudodami aklos perrankos, kai tiesiog mechaniškai arba kompiuteriu išgaudomi arba suregistruojami visi tinkami atvejai, tai tada, kai mums jau pasirodys, kad sistemos su mažesniu svarelių skaičiumi jau nebeatsiras, tai tada tai, kad nebegalėsime išsiversti su mažiau svarelių, mums teks įrodinėti.

Todėl dabar mums reikia paimti kokią nors neblogą praktinę reikšmę ir vėliau mėginti mažinti svarelių skaičių.

Sakysime, mums visai tiktų jau tik 10 svarelių sistema, susidedanti iš tokių svorių

$$1, 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5.$$

Ją tikrai galima suskirstyti ir į dvi lygias grupes

$$1+1+1+1+1+5+5 \quad \text{ir} \quad 5+5+5,$$

galima ir į 3:

$$1+1+1+1+1+5, \quad 5+5, \quad 5+5,$$

galima ir į 6:

$$1+5, \quad 1+5, \quad 1+5, \quad 1+5, \quad 1+5, \quad 1+5.$$

Ir jau gali pasirodyti, kad tai labai gerai, kad jau reikės imti abstrakčiai samprotauti, kad jau daugiau nebegalima turėti su mažiau svarelių, bet čia išnyra sistema

$$1, 1, 1, 3, 3, 3, 6, 6, 6,$$

kurioje yra vienu svareliu mažiau ir kuri irgi „susidėlioja“ ir į 2, ir į 3 ir į 5 lygiasvores dalis. Tai gal jau dabar galima būtų imti įrodinėti, kad su mažiau svarelių neišsiversime.

Tada mūsų uždavinio sprendimo teorijos kūrimas jau būtų pasibaigęs ir galėtų būti tobulinamas veikiausiai jau tik jos pateikimas.

Tačiau prieš pat griebdamiesi įrodinėjimo, pamatome, kad su 8 svoriais išsiversti įmanoma: tikrai imdami 8 svarelių sistemą, susidedančią iš

$$2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6,$$

matome, kad „misija“ įmanoma.

Skirstinys $2+4$, $2+4$, $3+3$, 6, 6 rodo, kad svarelius galima suskirstyti į 5 lygias dalis. Skirstinys $2+2+3+3$, $4+6$, $4+6$ rodo, kad rinkinį galima suskirstyti ir į 3 lygias dalis, belieka jį dar sudėlioti ir į dvi lygiasvores dalis – tai irgi įmanoma:

$$2+2+3+4+4 \quad \text{ir} \quad 3+6+6.$$

Dabar labai rūpėtų gauti prieštaravimą tam, kad galima išsiversti su 7 svareliais. Tarkime, kad tai įmanoma ir galima viską padaryti su 7 svareliais. Tada tame rinkinyje turi būti bent trys svorio 6 svareliai. Kitaip, jeigu tokių būtų tik 2, tai dar trys svorio 6 rinkiniai susidėtų iš bent dviejų svorių kiekvienas ir iš viso svarelių jau būtų

$$2+3\cdot 2=8,$$

o jų tiek nėra, jų pagal sąlygą yra tik 7.

Taigi turi būti bent 3 svorio 6 svareliai. Daugiau jų būti negali, nes teliktų daugiausiai 6 vienetų svorio rinkinys, su kuriuo mes niekaip jau nesudėtume trijų rinkinių po 10.

Jeigu yra 3 svorio 6 svareliai, tai iš likusių 4 svarelių, kurių svoris yra 12 reikia galėti išdėti 3 rinkinius po 4 ir dar būtinai turėti 2 nelyginius svarelius, nes reikės išdėti 2 kartus po 15. Tada tie abu nelyginiai svoriai įeina arba į tą patį svorio 4 rinkinį ir tada jis yra $3+1$ arba $1+1+2$. Jei $3+1$, tada dar ir kitas 4-ių svorio rinkinys turi būti sudėtinis, nes jei nė vienas toks nebūtų, tai tada iš rinkinio 1, 3, 4, 4 jau nebesusirenka du rinkiniai po 6. O atvejis $1+1+2$ reiškia, kad iš viso rinkinyje svarelių jau 8, nes dar turi būti 2 svareliai po 4 ir jau susirenka 8 svareliai 1, 1, 2, 4, 4, 6, 6, 6.

Taigi įrodėme, kad tokiame svorių rinkinyje turi būti bent 8 svareliai.

Matome, kad ir čia, kaip ir visada, sprendžiant nors kiek rimtesnį uždavinį turime „konkretų“ darbą su faktais, šiuo atveju su svorių rinkiniais ir toliau samprotavimus, tai yra turime uždavinio filosofiją arba abstrakčius samprotavimus, vienu ar kitu požiūriu nagrinėjančius visus tokius rinkinius. Šioje vietoje iš karto pateikiame skaitytojams ir kitą panašų uždavinį, kurį jūs vėliau galėtumėte išspręsti jau „savo malonumui“. Spręsdami Jūs iš karto pajusite tų sprendimų giminystę.

UŽDAVINYS. *Ant stalo guli vienas milijonas litų monetomis po vieną litą. Monetas leidžiama „sustumti“ į krūveles, bet taip, kad vėliau, neardant tų krūvelių jas būtų galima vienaip sustumti į* 8 *krūvas po* 125 000 *litų ir kitaip sustumti į* 5 *„superkrūvas“ po* 200 000 *litų*.

Uždavinio teorijos esmė šiuo kartu bus išsiaiškinti, kiek tada daugiausiai litų gali būti pačioje mažiausiai litų turinčioje pinigų krūvelėje.

Šiuo atveju sprendžiant uždavinį anksčiau ar vėliau mes atsiremiame į tokią sustūmimo į krūvas schemą:

$$4\times 50\,000, \quad 4\times 75\,000 \quad \text{ir} \quad 4\times 125\,000,$$

kuri tikrai susidėlioja ir į 8 superkrūvas po 125 000:

$$4\times(50000+75000) \quad \text{ir} \quad 4\times 125000.$$

ir taip pat į 5 superkrūvas po 200 000:

$$50\,000+50\,000+50\,000+50\,000, \quad 75\,000+125\,000,$$
$$75\,000+125\,000, \quad 75\,000+125\,000, \quad 75\,000+125\,000.$$

Dabar jau uždavinio teorijos eksperimentinių duomenų kaupimas pamažu baigiasi, nes niekaip nebepavyksta sustumdyti tuos litus taip, kad mažiausioje krūvoje būtų daugiau kaip 50 000 litų.

Ir tada tenka tarti: tarkime, kad pačioje mažiausioje krūvoje galima turėti daugiau 50 000 litų.

Tada visos superkrūvos, turinčios po 125 000 litų turi būti sustumiamos iš bent dviejų (o tada lygiai iš dviejų krūveliu). Jeigu būtų ne taip, jeigu būtų kokia nors 125 000 litų krūvelė, tai tada ji dalyvautų ir 200 000 superkrūvos sustumdyme ir tada rastųsi ir krūvelė, turinti lygiai 75 000 litų.

Toji 75 000 litų krūvelė, dalyvautų kokios nors 125 000 superkrūvos sustumdyme ir dalyvautų būtinai su tokia nors 50 000 litų krūvele, o tai jau prieštara tam, kad pačioje mažiausioje krūvelėje turime daugiau kaip 50 000 litų.

Vadinasi visos 125 000 litų superkrūvos yra sudėtinės, arba „susistumia“ iš daugiau kaip vienos, vadinasi, susideda iš bent 2 krūvelių.

Kadangi superkrūvų po 125 000 yra 8, o kiekviena sustumiama bent iš dviejų krūvelių, tai jų yra bent 16.

Tačiau tada iš tų bent 16 krūvelių stumdydami jas į 5 superkrūvas po 200 000 litų į bet vieną 200 000 litų krūvą būsime priversi imti bent 4 krūveles – galima tai vadinti ir Dirichle principu.

Tačiau imdami 4 krūveles su daugiau kaip 50 000 litų kiekvienoje krūvelėje, mes 200 000 litų tikrai negausime, nes gausime daugiau.

Gautasis prieštaravimas įrodo, kad pačioje mažiausioje krūvelėje gali būti daugių daugiausiai 50 000 litų.

Dabar jau uždavinio sprendimo teorija yra jau visiškai sukurta ir varžytis mes dabar galėtume nebent stengdamiesi kuo vaizdžiau ją pateikti. Tai yra svarbu. Nes nuo to priklauso žmonių, kurie pajėgtų suprasti uždavinio sprendimą, jei jie to panorėtų, skaičius.

Nepaprastai įdomu yra tai, kad uždavinio sprendimas gali susidėti iš dviejų sakinių, bet ir tuo atveju kartais nutinka taip, kad vienas iš tų sakinių gali būti priskirtinas prie vadinamųjų konkrečių įžvalgų, o kitas – prie „pafilosofavimo“, arba kelių konkrečių įžvalgų palyginimo.

Pasižiūrėkime į tokį uždavinį ir pasižiūrėkime, kaip konstruojama jo sprendimo teorija, arba pakeliui išspręskime vieną Ukrainos uždavinį – tik su kiek didesniais skaičiais (bet šiuo atveju tai, kaip matysime, jokios reikšmės neturi).

UŽDAVINYS. *Nustatykite, ar skaičius*

$$(1+2+3+\cdots+2010+2011)^{2012}+(1+2+3+\cdots+2011+2012)^{2011}$$

yra pirminis ar nėra.

Iš karto geriau nesakykime, kelintai klasei skirtas tas uždavinys, kad išvengtume papildomo šalutinio poveikio.

Toks skaičius net informatikui visai neatrodo mažas, o koks skaičius yra pirminis, apskritai niekam priminti nereikia.

Šiuo atveju, kai skaičius yra tikrai didelis, tai jis tikrai nebus pirminis, jei mes sugebėsime „įžiūrėti“, kokį nors nedidelį daliklį – tik kad ne 1.

Pirmoji konkreti įžvalga arba uždavinio sprendimo teorijos „eksperimentinė bazė“ galėtų būti susijusi su nustatymu, ar pirmųjų skliaustų skaičius

$$1+2+3+\cdots+2010+2011$$

yra lyginis ar ne. Mes tuojau galėtume pastebėti, kad tas skaičius yra lyginis (jis pagal progresijos formulę) yra $1006 \cdot 2011$, lygiai kaip lyginis yra ir skaičius

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2010 + 2011 + 2012,$$

nes jis yra $1006 \ldots 2013$.

Taigi skaitiniais eksperimentais turime, kad abu tie skaičiai yra lyginiai. Toliau jau belieka tik pasakyti, kad bet kuris lyginio skaičiaus laipsnis vėl yra lyginis skaičius, o dviejų lyginių skaičių suma – vėl lyginė.

Taip mūsų didžiulis skaičius nėra pirminis, nes yra lyginis ir dalijasi iš dviejų.

Šiuo atveju mes tik galėtume nurodyti, kad šioji trumputė teorija gali būti gerokai sutrumpinta pastebėjus, kad didžiuliai tų abiejų gretimų skliaustų skaičiai

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2010 + 2011 \quad \text{ir} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + 2010 + 2011 + 2012$$

skiriasi paskutiniuoju antrųjų skliaustų dėmeniu 2012 ir todėl jie abu yra tokio paties lyginumo – šiuo atveju visai nesvarbu, kokio uždavinio sprendimo išvados bus lygiai tokios pačios, nes ir nelyginio skaičiaus bet kuris laipsnis yra nelyginis ir tada dviejų dabar jau nelyginių skaičių suma vėl yra lyginė.

Pagrindinės išvados būtų tokios:

1. Bet kurio matematinio ar kitokio uždavinio sprendimo procesas iš esmės niekuo nesiskiria nuo mokslinės teorijos vystymosi raidos (nebent apimtimi) .
2. Matematikos uždavinio sprendimo trumpumas dažnai leidžia labai veiksmingai ir patraukliai išryškinti skirtingus uždavinio sprendimo momentus ir pabrėžti jų svarbą lyginant juos su svarbiais konkretaus mokslo raidos etapais.
3. Matematinio uždavinio sprendimo skirtumas nuo mokslo teorijos eksperimentų yra tas, kad matematiniai eksperimentai „nieko nekainuoja“. Jie gali būti bet kada „sustabdyti“ ir vėl pratęsti.
4. Dėl tūkstantmečio matematikos vystymosi raidos jos aparatas yra labai tobulas ir tai leidžia net paprastam aritmetiniam uždaviniui suteikti didelį interpretacinę eleganciją.
5. Tikros kūrybos elementai labai skatina mokinių kūrybinę vaizduotę ir kelia jų inovacinį potencialą.

Straipsnyje minimų aspektų požiūriu klasikinis tekstas buvo ir lieka Polya knyga [2]. Tiems dalykams yra skirta yra skirta ir vieno iš straipsnio autorių knygelė [1].

Literatūra

[1] R. Kašuba. *Kaip spręsti, kai nežinai kaip.* TEV, Vilnius, 2006, 148 psl. ISBN 9955680237.

[2] G. Polya. *How to Solve It.* Princeton University Press, 2nd edition, 1957. ISBN 0-691-08097-6.

SUMMARY

Solving of mathematical problems as preimage of creation and developing of scientific theories

R. Rudalevičienė, R. Kašuba

In the paper some aspects of natural analogy and similarity between problem solving and creation and developing of scientific theories are discussed.

Keywords: Steps in problem solving, natural developing of scientific theories, school didactics, potential creativity, elegancy of problem posing.

Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B, **53**, 2012, 220–225.